

## 回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果\*

野田 尚昭<sup>\*1</sup>, 小笠原 望<sup>\*2</sup>, 松尾 忠利<sup>\*3</sup>Interaction Effect between Ellipsoidal Cavities  
in an Infinite Body under Uniaxial Tension

Nao-aki NODA, Nozomu OGASAWARA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with the numerical solution of singular integral equations of the body force method in the interaction problem of ellipsoidal cavities under uniaxial tension. The problem is solved by the superposition of two auxiliary loads: (i) biaxial tension and (ii) plane state of pure shear. These problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy type singularities, where the densities of body forces distributed in the  $r$ ,  $\theta$  and  $z$  directions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundaries, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are applied. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for stress distribution along the boundaries.

**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration Factor, Ellipsoidal Cavity, Uniaxial Tension, Interaction Effect

## 1. 緒 言

内部欠陥をもつ部材の強度評価に関連して、複数個の回転だ円体状空かを有する無限体の引張問題は重要な応力集中問題の一つである。今までに回転だ円体状空かを有する無限体の二軸引張問題や軸方向引張問題といった軸対称問題の解析は多くなされており、著者らもさきに体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を用いて回転だ円体状空か<sup>(1)</sup> および介在物<sup>(2)</sup>の軸対称問題を取り扱った。しかし、より重要な非軸対称一軸引張問題の解析例は少なく、干渉問題については、球かに関する土田ら<sup>(3)</sup>の解析以外見当たらない。

そこで、本研究では、2個の等大回転だ円体状空かを有する無限体の二つの問題(二軸引張問題と純粋せん断問題)を前報と同様に体積力法の特異積分方程式を用いて厳密に解析し、これらを重ね合わせることで、非軸対称問題(一軸引張問題)へと発展させた。

そして、形状比と距離を系統的に変化させ、応力集中の干渉効果を調べた。

## 2. 解 析 方 法

図1(c)に示すような、主軸長 $2a, 2b$ の2個の等大回転だ円体状空かを有する無限体が遠方で一様な $x$ 方向の一軸引張応力 $\sigma^\infty$ を受けている干渉問題Cを体積力法を用いて解析する。本問題は、図1に示されるように二つの問題A, Bの重ね合わせにより構成される。いま直角座標系を $(x, y, z)$ とし、円筒座標系を $(r, \theta, z)$ として図1(d)のように定義する[着力点に関する座標の記号は $(\xi, \eta, \zeta)$ と $(\rho, \phi, \zeta)$ とする]。問題Aについては、前報の方法<sup>(1)</sup>により解析可能である。以下では、問題Bの解法を中心に説明する。

この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、空かのない無限体中の二つの円周上 $[\rho = a \cos \alpha, \zeta = \pm(d + b \sin \alpha)]$ に大きさが $\cos 2\phi$ または $\sin 2\phi$ で変化する集中力の輪が作用するときの任意の点 $(r = a \cos \phi, z = d + b \sin \phi)$ の応力場の解 $(K_{nn}^{Fr} + K_{nn}^{F\theta}, K_{nn}^{Fz}, K_{nr}^{Fr} + K_{nr}^{F\theta}, K_{nr}^{Fz})$ を用いて解くことができる( $\alpha$ は回転だ円体状の着力点を表すパラメータである)。

このとき問題は、空かとなるべき仮想境界上に分布

\* 1995年9月12日 第73期全国大会講演会において講演、原稿受付 1995年8月14日。

<sup>\*1</sup> 正員、九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

<sup>\*2</sup> 学生員、九州工業大学大学院。

<sup>\*3</sup> 正員、九州工業大学大学院。

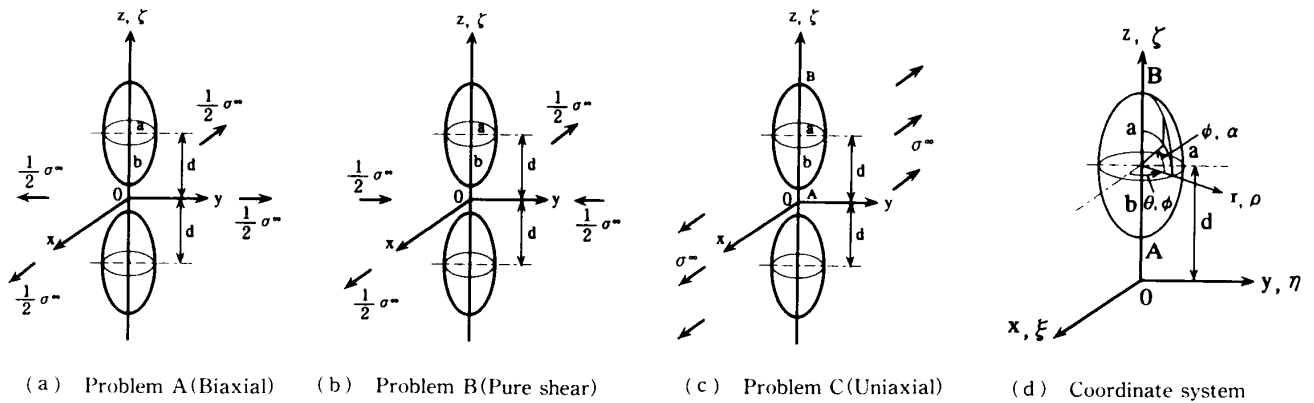


Fig. 1 Problem and coordinate system

させた面積  $\rho d\phi ds$  ( $ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$ ) の微小要素に作用させた体積力密度  $\rho_r^*(a)$ ,  $\rho_\theta^*(a)$ ,  $\rho_z^*(a)$  を未知関数とする特異積分方程式 (1) で表現される。

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2}\right) \{ \rho_r^*(\psi) \cos \psi_0 + \rho_z^*(\psi) \sin \psi_0 \} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nr}^F(a, \psi) \rho_r^*(a) ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nz}^F(a, \psi) \rho_z^*(a) ds \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta}^F(a, \psi) \rho_\theta^*(a) ds = -\sigma_r^\infty \cos^2 \psi_0 \cos 2\theta \\ & \left(-\frac{1}{2}\right) \{ -\rho_r^*(\psi) \sin \psi_0 + \rho_z^*(\psi) \cos \psi_0 \} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nr}^F(a, \psi) \rho_r^*(a) ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nz}^F(a, \psi) \rho_z^*(a) ds \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta}^F(a, \psi) \rho_\theta^*(a) ds = -\sigma_r^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0 \cos 2\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで,

$$-d\rho = a \sin \alpha da, \quad d\zeta = b \cos \alpha da, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} da \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。また、 $\psi_0$  は点  $(r, z)$  における空かの外向き法線と  $r$  軸のなす角、 $\sigma_r^\infty \cos 2\theta$  は  $r \rightarrow \infty$  での純粋せん断応力場である。

式 (1) は仮想境界上における境界条件  $\sigma_n = 0$ ,  $\tau_{nt} = 0$  に相当している。式 (1) の第 1 項は、体積力を  $\ominus$  境界に作用させたとき仮想境界上に生じる応力の項である。式 (1) の第 2, 第 3 項は、 $\psi = \alpha$  のとき  $1/\sin \{(\psi - \alpha)/2\}$  の特異性を有する。そのため、 $\psi = \alpha$  の場合には、積分のコーシーの主値を取るものとする。特異積分方程式 [式 (1)] の未知関数である  $\rho_r^*(a)$ ,  $\rho_\theta^*(a)$ ,  $\rho_z^*(a)$  は次式で定義される。

$$\rho_r^*(a) \cos 2\phi = \frac{dF_r}{\rho d\phi ds}, \quad \rho_\theta^*(a) \sin 2\phi = \frac{dF_\theta}{\rho d\phi ds}, \quad \rho_z^*(a) \cos 2\phi = \frac{-dF_z}{\rho ds d\phi} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $dF_r$ ,  $dF_\theta$ ,  $dF_z$  は、面積  $\rho d\phi ds$  の微小要素に作用する体積力の合力の  $r$ ,  $\theta$  および  $z$  方向の成分である。前報<sup>(1)</sup> と同様に、 $r$ ,  $\theta$  および  $z$  方向の体積力の基本密度関数  $w_r(a)$ ,  $w_\theta(a)$  および  $w_z(a)$  を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} w_{r1}(a) &= n_r(a)/\cos \alpha, & w_{r2}(a) &= n_r(a) \tan \alpha, & w_{r3}(a) &= n_r(a), & w_{r4}(a) &= n_r(a) \sin \alpha \\ w_{\theta1}(a) &= n_r(a)/\cos \alpha, & w_{\theta2}(a) &= n_r(a) \tan \alpha, & w_{\theta3}(a) &= n_r(a), & w_{\theta4}(a) &= n_r(a) \sin \alpha \\ w_{z1}(a) &= n_z(a)/\sin \alpha, & w_{z2}(a) &= n_z(a), & w_{z3}(a) &= n_z(a) \cot \alpha, & w_{z4}(a) &= n_z(a) \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $n_r(a)$ ,  $n_z(a)$  は、仮想境界上の点  $(r, z)$  における単位外向き法線ベクトルの  $r$ ,  $z$  方向の座標成分 ( $\cos \psi_0$ ,  $\sin \psi_0$ ) であり、次式で表される。

$$n_r(a) = \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}, \quad n_z(a) = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

すなわち、本解析では、式 (4) で定義される基本密度関数と重み関数の組合せによって  $\rho_r^*(a)$ ,  $\rho_\theta^*(a)$ ,  $\rho_z^*(a)$  を表現する。

いま、問題の性質 ( $\alpha = 90^\circ$  に関する対称性) を考慮して、基本密度関数として、 $w_{r3}(a)$ ,  $w_{r4}(a)$ ,  $w_{\theta3}(a)$ ,  $w_{\theta4}(a)$ ,  $w_{z1}(a)$ ,  $w_{z2}(a)$  を採用すれば、 $\rho_r^*(a)$ ,  $\rho_\theta^*(a)$ ,  $\rho_z^*(a)$  は、 $\alpha = 0$  で対称な未知関数  $\rho_{r3}(a)$ ,  $\rho_{r4}(a)$ ,  $\rho_{\theta3}(a)$ ,  $\rho_{\theta4}(a)$ ,  $\rho_{z2}(a)$ ,  $\rho_{z1}(a)$  を用いて式 (6) で表される。

$$\begin{aligned}\rho_r^*(\alpha) &= \rho_{r3}(\alpha)w_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha)w_{r4}(\alpha), \quad \rho_\theta^*(\alpha) = \rho_{\theta3}(\alpha)w_{\theta3}(\alpha) + \rho_{\theta4}(\alpha)w_{\theta4}(\alpha), \\ \rho_z^*(\alpha) &= \rho_{z2}(\alpha)w_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha)w_{z1}(\alpha) \dots \dots \dots (6)\end{aligned}$$

したがって、問題は式(7)の特異積分方程式で表現される。

$$\begin{aligned}& \left(-\frac{1}{2}\right) \left[ \{ \rho_{r3}(\psi) + \rho_{r4}(\psi) \sin \psi \} \cos^2 \psi_0 + \{ \rho_{z2}(\psi) + \rho_{z1}(\psi) / \sin \psi \} \sin^2 \psi_0 \right] \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fr}(\alpha, \psi) \{ \rho_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha) \sin \alpha \} b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{F\theta}(\alpha, \psi) \{ \rho_{\theta3}(\alpha) \\ & + \rho_{\theta4}(\alpha) \sin \alpha \} b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(\alpha, \psi) \{ \rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha) / \sin \alpha \} a \sin \alpha d\alpha \\ & = -\sigma_r^\infty \cos^2 \psi_0 \cos 2\theta \\ & \left(-\frac{1}{2}\right) \left[ -\{ \rho_{r3}(\psi) + \rho_{r4}(\psi) \sin \psi \} + \{ \rho_{z2}(\psi) + \rho_{z1}(\psi) / \sin \psi \} \right] \sin \psi_0 \cos \psi_0 \\ & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fr}(\alpha, \psi) \{ \rho_{r3}(\alpha) + \rho_{r4}(\alpha) \sin \alpha \} b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{F\theta}(\alpha, \psi) \{ \rho_{\theta3}(\alpha) \\ & + \rho_{\theta4}(\alpha) \sin \alpha \} b \cos \alpha d\alpha + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nt}^{Fz}(\alpha, \psi) \{ \rho_{z2}(\alpha) + \rho_{z1}(\alpha) / \sin \alpha \} a \sin \alpha d\alpha \\ & = -\sigma_r^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0 \cos 2\theta \\ & \dots \dots \dots (7)\end{aligned}$$

式(1)および式(7)に含まれる  $K_{nn}^{Fr}$  等は、(1)無限体中で、 $\cos 2\phi$  で変化する  $r$  方向の集中力のリング  $F_r$  による応力  $\sigma^{Fr}$ 、(2)  $\sin 2\phi$  で変化する  $\theta$  方向の集中力のリング  $F_\theta$  による応力  $\sigma^{F\theta}$ 、(3)  $\cos 2\phi$  で変化する  $z$  方向の集中力のリング  $F_z$  による応力  $\sigma^{Fz}$  の表示から計算できる。そこで、無限体中の一点に集中力が作用する場合の応力場を用いて、具体的に上記の応力を求めると以下のような表示を得る ( $\sigma^{F\theta}$ 、 $\sigma^{Fz}$  については紙面の都合上省略する)。

$$\begin{aligned}\sigma_r^{Fr} &= B_r \left[ (1-2\nu)(\rho I_{3,0} + r I_{3,1} - 4\rho I_{3,2} - 2r I_{3,3} + 4\rho I_{3,4}) + \frac{3}{r_m^2} \{ -r^2 \rho I_{5,0} + r(r^2 + 2\rho^2) I_{5,1} \right. \\ & \quad \left. - \rho^3 I_{5,2} - r(2r^2 + 3\rho^2) I_{5,3} + 2\rho(2r^2 + \rho^2) I_{5,4} - 2r\rho^2 I_{5,5} \} \right] \cos 2\theta \\ \sigma_\theta^{Fr} &= B_r \left[ (1-2\nu)(-\rho I_{3,0} - r I_{3,1} + 4\rho I_{3,2} + 2r I_{3,3} - 4\rho I_{3,4}) - \frac{3}{r_m^2} (\rho^3 I_{5,0} - r\rho^2 I_{5,1} - 3\rho^3 I_{5,2} \right. \\ & \quad \left. + 3r\rho^2 I_{5,3} + 2\rho^3 I_{5,4} - 2r\rho^2 I_{5,5}) \right] \cos 2\theta \\ \sigma_z^{Fr} &= B_r \left[ (1-2\nu)(\rho I_{3,0} - r I_{3,1} - 2\rho I_{3,2} + 2r I_{3,3}) + \frac{3(z-\zeta)^2}{r_m^2} (-\rho I_{5,0} + r I_{5,1} + 2\rho I_{5,2} - 2r I_{5,3}) \right] \cos 2\theta \\ \tau_{rz}^{Fr} &= B_r \left[ (1-2\nu)(z-\zeta)(-I_{3,1} + 2I_{3,3}) + \frac{3(z-\zeta)}{r_m^2} \{ -r\rho I_{5,0} + (r^2 + \rho^2) I_{5,1} + r\rho I_{5,2} \right. \\ & \quad \left. - 2(r^2 + \rho^2) I_{5,3} + 2r\rho I_{5,4} \} \right] \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}^{Fr} &= -2B_r \left[ (1-2\nu)(-r I_{3,1} + 2\rho I_{3,2} + r I_{3,3} - 2\rho I_{3,4}) + \frac{3}{r_m^2} \{ -r\rho^2 I_{5,1} + \rho(r^2 + \rho^2) I_{5,2} \right. \\ & \quad \left. - \rho(r^2 + \rho^2) I_{5,4} + r\rho^2 I_{5,5} \} \right] \sin 2\theta \\ \tau_{\theta z}^{Fr} &= -2B_r \left[ -(1-2\nu)(z-\zeta)(I_{3,1} - I_{3,3}) + \frac{3(z-\zeta)}{r_m^2} (-\rho^2 I_{5,1} + r\rho I_{5,2} + \rho^2 I_{5,3} - r\rho I_{5,4}) \right] \sin 2\theta \\ & \dots \dots \dots (8)\end{aligned}$$

$$B_r = \frac{F_r \rho}{4\pi(1-\nu)}, \quad r_m = \sqrt{2r\rho} \dots \dots \dots (9)$$

$$I_{n,m} = \frac{1}{r_m^3} \int_0^\pi \frac{\cos^m \phi}{(e - \cos \phi)^{n/2}} d\phi \dots \dots \dots (10)$$

$$e = 1 + \frac{(r-\rho)^2 + (z-\zeta)^2}{2r\rho} \dots \dots \dots (11)$$

野口ら<sup>(4)</sup>は半無限体表面ピットの問題を式(8)~(11)と同様の表示を導いて解析している。上式からわかるように、式(3)のように体積力密度を定義し、 $\sigma^{Fr}$ 、 $\sigma^{F\theta}$ 、 $\sigma^{Fz}$ を基本解とすれば体積力による応力は、一つの円周上で  $\cos 2\theta$  あるいは  $\sin 2\theta$  で変化する。したがって式(1)の右辺で表される無限遠の純粹せん断の応力場を仮想境界上で体積

力を分布させることにより打ち消す場合、周方向の一点で境界条件を満たせば周方向のいたる点で条件を満たすことになる。したがって本手法を用いれば、周方向の分割が不要となり、未知数が減少し高精度の解析が可能となる。

注目点が着力区間に含まれるときは、数値積分に特別な考慮が必要である。具体的には、境界条件を考える注目点  $\psi$  を含む  $2\varepsilon_0$  の範囲 ( $\varepsilon_0$  は微小角度)  $\psi - \varepsilon_0 \leq \alpha \leq \psi + \varepsilon_0$  の着力区間の積分については、直接解析的に積分した式を用いて計算した。これらの直接積分に含まれる被積分関数は、(基本解)  $\times$  (基本密度関数)  $\times$  (重み関数) の形で表され、 $\alpha = \psi + \varepsilon$  ( $\varepsilon$  は  $\psi$  からの微小角度) としていま基本解の部分のみを  $\varepsilon$  で展開して表すと以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{\rho r} &= - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} + \frac{2a^3 \sin^3 \psi}{R_0^4} \right\} / \varepsilon + \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cot \psi}{2} - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) + \frac{2a^3 \sin^3 \psi}{R_0^4} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} + \frac{3 \cot \psi}{2} - \frac{2(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{10r} + \frac{a^2 \sin^2 \psi}{2rR_0^2} - \frac{(1-2\nu)}{30r} \left\{ 161 - 45 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_\theta^{\rho r} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ -\frac{2\nu a \sin \psi}{R_0^2} \right\} / \varepsilon + \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} + \frac{\cot \psi}{2} - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{a \sin \psi}{R_0^2} \left( -\frac{3a \sin \psi}{2r} + \frac{\cot \psi}{2} - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) - \frac{(1-2\nu)}{30r} \left\{ 161 - 45 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{10r} \left\{ 59 - 15 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_z^{\rho r} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} - \frac{2ab^2 \sin \psi \cos^2 \psi}{R_0^4} \right\} / \varepsilon + \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\cot \psi}{2} - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) - \frac{2ab^2 \sin \psi \cos^2 \psi}{R_0^4} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} + \frac{\cot \psi}{2} - \tan \psi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) + \frac{b^2 \cos^2 \psi}{2rR_0^2} + \frac{(1-2\nu)}{6r} \left\{ 11 - 3 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{rz}^{\rho r} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} + \frac{2a^2 b \sin^2 \psi \cos \psi}{R_0^4} \right\} / \varepsilon + \frac{2a^2 b \sin^2 \psi \cos \psi}{R_0^4} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\tan \psi}{2} + \cot \psi - \frac{2(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) + \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} - \frac{\tan \psi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{r\theta}^{\rho r} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{2a^2 \sin^2 \psi}{rR_0^2} + \frac{8}{5r} + \frac{2(1-2\nu)}{15r} \left\{ 44 - 15 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{\theta z}^{\rho r} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{2ab \sin \psi \cos \psi}{rR_0^2} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_r^{\rho \theta} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{2}{5r} + \frac{2a^2 \sin^2 \psi}{rR_0^2} + \frac{2(1-2\nu)}{15r} \left\{ 44 - 15 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_\theta^{\rho \theta} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ -\frac{2(1-2\nu)}{15r} \left\{ 44 - 25 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} + \frac{1}{5r} \left\{ -92 + 30 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_z^{\rho \theta} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{b^2 \cos^2 \psi}{rR_0^2} - \frac{(1-2\nu)}{3r} \left\{ -5 + 3 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{rz}^{\rho \theta} &= - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{2ab \sin \psi \cos \psi}{rR_0^2} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{r\theta}^{\rho \theta} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ -\frac{2(1-\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \right\} / \varepsilon - \frac{2(1-\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} + \frac{\cot \psi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) + \frac{(1-2\nu)}{30r} \left\{ 161 - 45 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} + \frac{1}{10r} \left\{ 59 - 15 \ln \left( \frac{8r}{R_0 \varepsilon} \right) \right\} \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\tau_{\theta z}^{\rho \theta} &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{2(1-\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \right\} / \varepsilon + \frac{2(1-\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\tan \psi}{2} - \frac{(a^2-b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \right) \right] w^*(\alpha) t_n(\alpha) d\varepsilon \\
\sigma_r^{\rho z} &= - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \left\{ \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} - \frac{2a^2 b \sin^2 \psi \cos \psi}{R_0^4} \right\} / \varepsilon + \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \left( -\frac{a \sin \psi}{2r} \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\tan \psi}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) - \frac{2a^2 b \sin^2 \psi \cos \psi}{R_0^4} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} - \frac{\tan \psi}{2} \\
 & + \cot \psi - \frac{2(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) - \frac{ab \sin \psi \cos \psi}{r R_0^2} \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 \sigma_{\theta z}^{\rho z} = & \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \Big[ \Big\{ \frac{2\nu b \cos \psi}{R_0^2} \Big\} / \epsilon - \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} - \frac{\tan \psi}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) \\
 & + \frac{b \cos \psi}{R_0^2} \Big( -\frac{3a \sin \psi}{2r} - \frac{\tan \psi}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 \sigma_{zz}^{\rho z} = & \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \Big[ \Big\{ \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} + \frac{2b^3 \cos^3 \psi}{R_0^4} \Big\} / \epsilon + \frac{(1-2\nu)b \cos \psi}{R_0^2} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} \\
 & - \frac{\tan \psi}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) + \frac{2b^3 \cos^3 \psi}{R_0^4} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} - \frac{3 \tan \psi}{2} \\
 & - \frac{2(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 \tau_{rz}^{\rho z} = & \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \Big[ \Big\{ -\frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} - \frac{2ab^2 \sin \psi \cos^2 \psi}{R_0^4} \Big\} / \epsilon - \frac{(1-2\nu)a \sin \psi}{R_0^2} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} \\
 & + \frac{\cot \psi}{2} - \frac{(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) - \frac{2ab^2 \sin \psi \cos^2 \psi}{R_0^4} \Big( -\frac{a \sin \psi}{2r} + \frac{\cot \psi}{2} - \tan \psi \\
 & - \frac{2(a^2 - b^2) \sin \psi \cos \psi}{R_0^2} \Big) - \frac{b^2 \cos^2 \psi}{2r R_0^2} + \frac{(1-2\nu)}{6r} \Big\{ 11 - 3 \ln \Big( \frac{8r}{R_0 \epsilon} \Big) \Big\} \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 \tau_{r\theta}^{\rho z} = & \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \Big[ \frac{2ab \sin \psi \cos \psi}{r R_0^2} \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 \tau_{\theta z}^{\rho z} = & - \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \Big[ \frac{2b^2 \cos^2 \psi}{r R_0^2} + \frac{2(1-2\nu)}{3r} \Big\{ -8 + 3 \ln \Big( \frac{8r}{R_0 \epsilon} \Big) \Big\} \Big] w_z^*(a) t_n(a) d\epsilon \\
 & \dots\dots\dots (12)
 \end{aligned}$$

$$R_0^2 = a^2 \sin^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi \quad \dots\dots\dots (13)$$

式(12)に対して、それぞれ2種類存在する基本密度関数  $w_r^*(a)$ ,  $w_\theta^*(a)$ ,  $w_z^*(a)$  ならびに重み関数  $t_n(a)$  の  $\epsilon$  に関する展開式は以下のように表される。

$$w_r^*(a) = \begin{cases} w_{r3}(a) \cong \rho_r b \cos \psi (1 - \epsilon \tan \psi) \\ w_{r4}(a) \cong \rho_r b \cos \psi (1 - \epsilon \tan \psi) \\ \quad \times \sin \psi (1 + \epsilon \cot \psi) \end{cases}$$

$$w_\theta^*(a) = \begin{cases} w_{\theta3}(a) \cong \rho_\theta b \cos \psi (1 - \epsilon \tan \psi) \\ w_{\theta4}(a) \cong \rho_\theta b \cos \psi (1 - \epsilon \tan \psi) \\ \quad \times \sin \psi (1 + \epsilon \cot \psi) \end{cases}$$

$$w_z^*(a) = \begin{cases} w_{z2}(a) \cong \rho_z a \sin \psi (1 + \epsilon \cot \psi) \\ w_{z1}(a) \cong \rho_z a \end{cases}$$

..... (14)

$$t_n(a) = \cos \{2(n-1)\alpha\} \cong \cos \{2(n-1)\psi\} \quad \dots (15)$$

式(14), (15)を用いれば、式(12)の積分が求められる。 $1/\epsilon$ の項には、コーシーの主値をとる。

問題B(純粋せん断)では、つねに  $\rho_r^*(a) = \rho_\theta^*(a)$  となることに注意して、未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

\*\*\* 軸対称体の曲げ問題を体積法で解析する際には、選点数  $M$  に対して  $3M$  個の未知数を決定する必要がある<sup>(5)</sup>が、軸対称体の純粋せん断問題では、未知数の個数は  $2M$  個となる。つまり、両者は類似の非軸対称問題ではあるがその取扱いは少し異なることになる。

$$\begin{cases} \rho_{r3}(a) = \rho_{\theta3}(a) = \sum_{n=1}^{M/2} a_n t_n(a) \\ \rho_{r4}(a) = \rho_{\theta4}(a) = \sum_{n=1}^{M/2} b_n t_n(a) \\ \rho_{z2}(a) = \sum_{n=1}^{M/2} c_n t_n(a) \\ \rho_{z1}(a) = \sum_{n=1}^{M/2} d_n t_n(a) \end{cases}$$

..... (16)

ここで、 $M$  は、 $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$  の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により、式(7)の積分方程式は、係数  $a_n, b_n, c_n, d_n$  についての  $2M$  元の連立方程式に還元される\*\*。

境界条件を満足させる点は、式(17)で定義される。

$$\psi_l = \left( \frac{\pi}{M} \right) (l - 0.5) - \frac{\pi}{2}, \quad l = 1 \sim M \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{M/2} (a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + d_n D_n) \\
 & = -\sigma_r^\infty \cos^2 \psi_0 \cos 2\theta \\
 & \sum_{n=1}^{M/2} (a_n E_n + b_n F_n + c_n G_n + d_n H_n) \\
 & = -\sigma_r^\infty \sin \psi_0 \cos \psi_0 \cos 2\theta
 \end{aligned}$$

..... (18)

$$\begin{aligned}
 A_n = & \left( -\frac{1}{2} \right) t_n(\psi) \cos^2 \psi_0 \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \{ K_{nn}^{Fr}(a, \psi) + K_{nn}^{Fs}(a, \psi) \} t_n(a) b \cos \alpha da \\
 & \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned}$$

$B_n \sim H_n$  も式(19)と同様な形で表現できる。任意の点の応力は、係数  $a_n, b_n, c_n, d_n$  と  $A_n \sim H_n$  に相当する影響係数の一次結合で表される。

以上の解析方法により無限体中の2個の等大回転だ円体状空かの境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

### 3. 解析結果および考察

本解析法は、だ円体の形状が扁平、偏長を問わず形状比  $a/b$  の広範囲で有効である。 $a/b > 1$  の場合についても一部解析を行ったが、応力集中および干渉効果が  $a/b \leq 1$  の場合と比べて小さくなったため、以下では  $a/b \leq 1$  についての結果を述べる。図1(c)の無限体中の2個の等大回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張り間

Table 1 Stress concentration factor ( $a/b=1.0$ )

| a/d | $\sigma_{\theta \max}$   |                   | $K_{IA}$          | $K_{IB}$          |
|-----|--------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|     | (deg.)                   | $K_{I \max}$      |                   |                   |
| 0   | -90 ~ +90<br>(-90 ~ +90) | 2.0456<br>(2.045) | 2.0456<br>(2.045) | 2.0456<br>(2.045) |
| 0.1 | 0<br>(0)                 | 2.0456<br>(2.046) | 2.0454<br>(2.045) | 2.0455<br>(2.045) |
| 0.2 | -9<br>(-10)              | 2.0462<br>(2.046) | 2.0449<br>(2.045) | 2.0455<br>(2.045) |
| 0.3 | -14<br>(-15)             | 2.0481<br>(2.048) | 2.0427<br>(2.043) | 2.0456<br>(2.046) |
| 0.4 | -19<br>(-20)             | 2.0525<br>(2.052) | 2.0379<br>(2.038) | 2.0464<br>(2.046) |
| 0.5 | -26<br>(-25)             | 2.0610<br>(2.060) | 2.0310<br>(2.031) | 2.0482<br>(2.048) |
| 0.6 | -33<br>(-30)             | 2.0772<br>(2.074) | 2.0302<br>(2.029) | 2.0513<br>(2.051) |
| 0.7 | -44                      | 2.1090            | 2.0669            | 2.0560            |
| 0.8 | -90<br>(-90)             | 2.2314<br>(2.230) | 2.2314<br>(2.230) | 2.0624<br>(2.062) |
| 0.9 | -90                      | 2.7734            | 2.7734            | 2.0705            |

( ) : Tsuchida<sup>(3)</sup>

Table 2 Convergency of stress  $\sigma_{\theta}|_{\theta=\pi/2}$  along the ellipsoidal boundaries ( $a/b=1/4, b/d=2/3, \nu=0.3$ )

| a/b=1/4, b/d=2/3, $\nu=0.3$ |    |           |           |           |
|-----------------------------|----|-----------|-----------|-----------|
| $\phi$ (deg.)               | M  | Problem A | Problem B | Problem C |
| -90.                        | 12 | 2.7609    | 2.5932    | 2.6771    |
|                             | 16 | 2.7599    | 2.5932    | 2.6766    |
|                             | 20 | 2.7596    | 2.5932    | 2.6764    |
|                             | 24 | 2.7595    | 2.5932    | 2.6763    |
| -80.                        | 12 | 2.4852    | 2.9623    | 2.7237    |
|                             | 16 | 2.4854    | 2.9623    | 2.7239    |
|                             | 20 | 2.4856    | 2.9623    | 2.7239    |
|                             | 24 | 2.4856    | 2.9623    | 2.7239    |
| -60.                        | 12 | 2.0745    | 3.5295    | 2.8020    |
|                             | 16 | 2.0744    | 3.5295    | 2.8019    |
|                             | 20 | 2.0744    | 3.5295    | 2.8019    |
|                             | 24 | 2.0744    | 3.5295    | 2.8019    |
| -37.                        | 12 | 1.9822    | 3.6634    | 2.8228    |
|                             | 16 | 1.9821    | 3.6634    | 2.8228    |
|                             | 20 | 1.9822    | 3.6634    | 2.8228    |
|                             | 24 | 1.9821    | 3.6634    | 2.8228    |
| -30.                        | 12 | 1.9656    | 3.6768    | 2.8212    |
|                             | 16 | 1.9656    | 3.6768    | 2.8212    |
|                             | 20 | 1.9655    | 3.6768    | 2.8212    |
|                             | 24 | 1.9655    | 3.6768    | 2.8212    |
| 0.                          | 12 | 1.8728    | 3.6879    | 2.7804    |
|                             | 16 | 1.8728    | 3.6879    | 2.7804    |
|                             | 20 | 1.8728    | 3.6879    | 2.7804    |
|                             | 24 | 1.8728    | 3.6879    | 2.7804    |
| 30.                         | 12 | 1.8160    | 3.6557    | 2.7358    |
|                             | 16 | 1.8160    | 3.6557    | 2.7358    |
|                             | 20 | 1.8160    | 3.6557    | 2.7358    |
|                             | 24 | 1.8160    | 3.6557    | 2.7358    |
| 60.                         | 12 | 1.9462    | 3.5029    | 2.7245    |
|                             | 16 | 1.9463    | 3.5029    | 2.7246    |
|                             | 20 | 1.9463    | 3.5029    | 2.7246    |
|                             | 24 | 1.9463    | 3.5029    | 2.7246    |
| 80.                         | 12 | 2.4155    | 2.9429    | 2.6792    |
|                             | 16 | 2.4152    | 2.9429    | 2.6790    |
|                             | 20 | 2.4151    | 2.9429    | 2.6790    |
|                             | 24 | 2.4150    | 2.9429    | 2.6789    |
| 90.                         | 12 | 2.7122    | 2.5764    | 2.6443    |
|                             | 16 | 2.7132    | 2.5764    | 2.6448    |
|                             | 20 | 2.7135    | 2.5764    | 2.6450    |
|                             | 24 | 2.7136    | 2.5763    | 2.6450    |

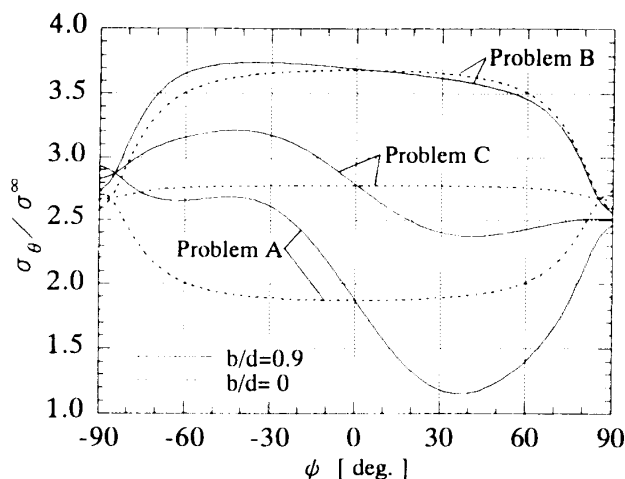


Fig. 2 Distribution of stress ( $a/b=1/4, \theta=\pi/2$ )

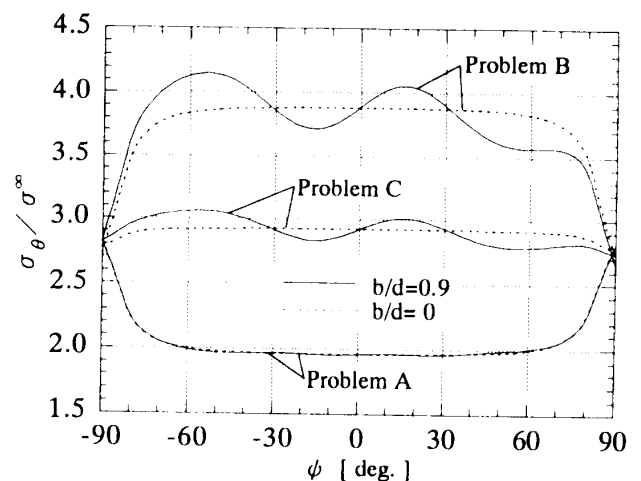
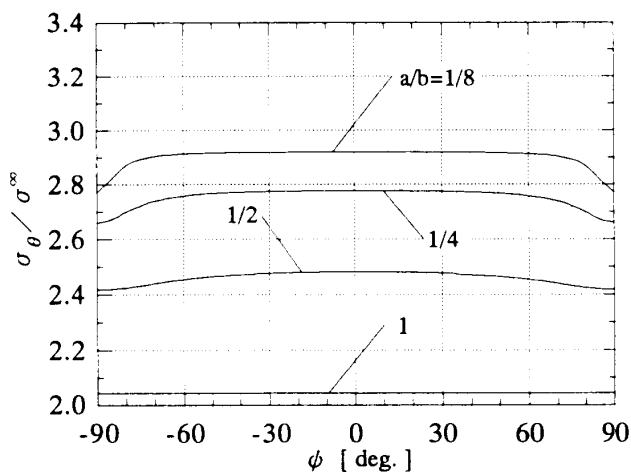
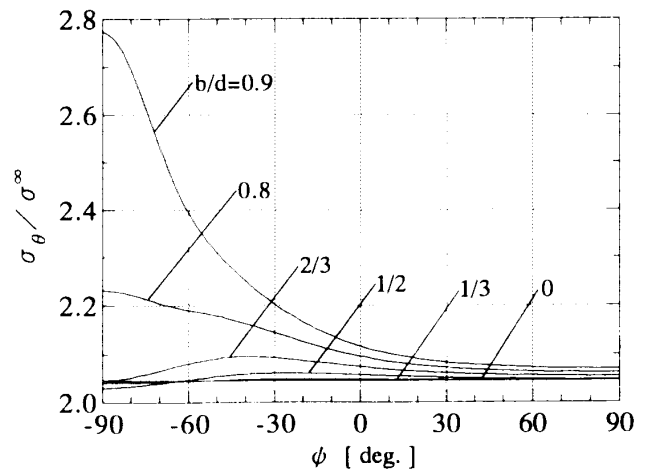
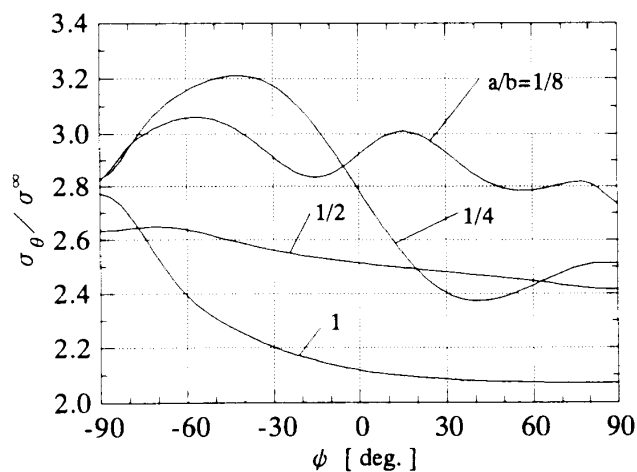
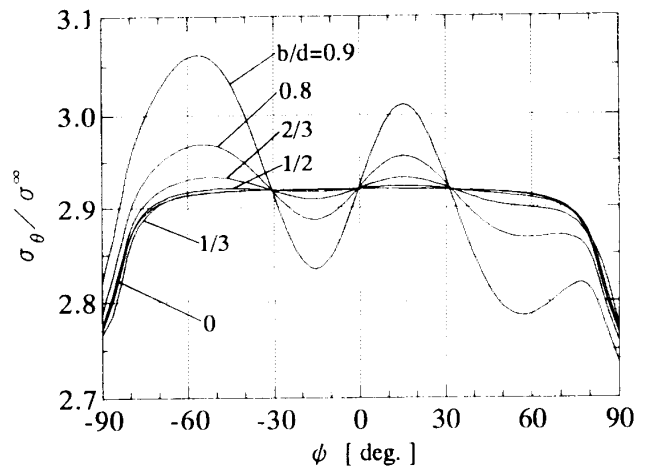


Fig. 3 Distribution of stress ( $a/b=1/8, \theta=\pi/2$ )

Table 3 Magnitude and position of the maximum stress of ellipsoidal cavities in Fig. 1(c)

| b/d | 0      |        | 1/3    |        | 1/2    |        | 2/3    |        | 0.8    |        | 0.9    |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| a/b | (deg.) | $K_t$  | (deg.) | $K_t$  | (deg.) | $K_t$  | (deg.) | $K_t$  | (deg.) | $K_t$  | (deg.) | $K_t$  |
| 1   | -90~90 | 2.0455 | -15    | 2.0492 | -26    | 2.0610 | -40    | 2.0957 | -90    | 2.2314 | -90    | 2.7735 |
| 1/2 | 0      | 2.4804 | -1     | 2.4815 | -7     | 2.4846 | -26    | 2.4948 | -48    | 2.5290 | -70    | 2.6496 |
| 1/4 | 0      | 2.7772 | -13    | 2.7780 | -29    | 2.7861 | -37    | 2.8228 | -40    | 2.9270 | -42    | 3.2119 |
| 1/8 | 0      | 2.9199 | 12     | 2.9203 | 15     | 2.9226 | -52    | 2.9327 | -55    | 2.9693 | -56    | 3.0615 |

Fig. 4 Distribution of stress ( $b/d=0$ ,  $\theta=\pi/2$ )Fig. 6 Distribution of stress ( $a/b=1.0$ ,  $\theta=\pi/2$ )Fig. 5 Distribution of stress ( $b/d=0.9$ ,  $\theta=\pi/2$ )Fig. 7 Distribution of stress ( $a/b=1/8$ ,  $\theta=\pi/2$ )

題において、形状比  $a/b=1.0$ ,  $\sigma^\infty=1$ ,  $\nu=0.3$  の場合について、 $a/d$  を変化させたときの最大応力の値とその発生位置、さらに A 点 ( $\phi=-90^\circ$ )、B 点 ( $\phi=+90^\circ$ ) における応力集中係数  $K_t$  を、土田らの結果<sup>(3)</sup> とともに表 1 に示す。両者はほとんどの場合で有効数字 4 けたまで一致する。

形状比  $a/b=1/4$ ,  $b/d=2/3$ ,  $\sigma^\infty=1$ ,  $\nu=0.3$  の場合の問題 A、B および問題 C の一軸引張りにおける応力集

中係数  $K_t$  の収束状況を表 2 に示す。本解析結果は、それぞれについて  $M=20$  程度で有効数字 5 けた程度収束しており、良好な収束性を示している。

次に、形状比  $a/b=1/4$  と  $a/b=1/8$  の場合について、 $b/d=0.9$  (実線) と  $b/d=0$  (点線) における問題 A、B、および問題 C の一軸引張りにおける応力分布を図 2、3 に示す。また、図 4、5 は、問題 C の一軸引張りにおいて  $b/d$  を一定にして  $a/b$  を 1.0, 1/2, 1/4, 1/8 と変

化させたときの応力分布を示す。図4より、 $a/b \rightarrow 0$ となるにつれて、 $\phi = \pm 90^\circ$  付近以外では応力が円孔を有する無限板の結果に近づくことがわかる。すなわち、 $b/d = 0$  のとき、図2, 3に見られるように、 $a/b \rightarrow 0$ となるにつれて、問題A, B, Cにおける $\sigma_\theta/\sigma^\infty$ の値が、円孔を有する無限板が(1)二軸引張り( $K_t=2$ )、(2)純粋せん断( $K_t=4$ )、(3)一軸引張り( $K_t=3$ )を受ける場合の応力集中係数の厳密解に近づく傾向が見られる。

さらに、形状比 $a/b=1.0, 1/8$ の場合について、 $b/d$ を変化させたときの応力分布を図6, 7に示す。 $a/b=1.0$ の場合については、土田らの解析結果<sup>(3)</sup>と極めてよく一致している。また図6, 7を比べると、 $b/d$ の変化に対して干渉効果が大きく生じる位置はかなり変化していることがわかる。つまり、 $a/b=1.0$ のときには干渉の影響は2個の空かの内側部分に応力の増加として表れるのに対して、 $a/b=1/8$ のときには、干渉の影響は場所によって異なり、応力が増加する場合と減少する場合が生じることがわかる。形状寸法比、 $a/b, b/d$ の変化にともなって、 $\sigma_{\max}$ の発生位置は微妙に変化しているが本解析ではこれらを正確に求めることが可能である。

最後に、形状比が $a/b=1.0, 1/2, 1/4, 1/8, \sigma^\infty=1, \nu=0.3$ の場合について、 $b/d$ を変化させたときの応力集中係数 $K_t$ の最大値の収束値を、その発生位置 $\phi$ とともに表3に示す。表3の応力集中係数の値は、いずれも表2の例に示すように、有効数字5けた程度まで収束していて、形状比 $a/b$ 、および $b/d$ の広範囲で本解析法が有効であることがわかった。

#### 4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を利用して、

2個の等大回転だ円体状空かを有する無限体の非軸対称一軸引張り問題を厳密に解析する方法を示し、干渉効果を考察した。結果をまとめると以下のようになる。

(1) 二つの空かを有する無限体が2種類の荷重を受ける問題(二軸引張り、純粋せん断)を厳密に解析し、これらを重ね合わせることで非軸対称問題(一軸引張り)に発展させた。本解析結果は、それぞれの場合について少ない選点数で良好な収束性が得られた(表2)。

(2) 球かの結果については、土田らの解析結果<sup>(3)</sup>と非常によく一致した(表1, 図6)。また、空かの形状比と距離を系統的に変化させた場合について、境界上のなめらかな応力分布が得られた(図4~7)。本解析結果は、空かの形状比 $a/b \rightarrow 0$ となるに従って、円孔を有する無限板の結果に無理なく一致する。

(3) 形状比と距離を系統的に変化させた場合について、それぞれ最大応力の値とその発生位置を示した(表3)。

#### 文 献

- (1) 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第3報, 三次元問題への応用), 機論, 59 564, A(1993), 1964 1970.
- (2) 野田尚昭・松尾忠利, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, 61 585, A(1995), 965 973.
- (3) 土田栄一郎・中原一郎, 小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題, 機論, 42 353(1976), 46 54.
- (4) 野田博司・西谷弘信・後藤浩文・森 和也, 回転半だ円体状ピットを有する半無限体の引張り, 機論, 53 488, A(1987), 820 826.
- (5) 村上敬宜・野田尚昭・西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析(第1報, 基礎理論と二, 三の問題への応用), 機論, 48 427, A(1982), 301 309.